

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМУЛ ПО СЛОЖНОСТИ И ЗАДЕРЖКЕ НА НАБОРАХ В МОДЕЛИ С ЗАДЕРЖКАМИ СОЕДИНЕНИЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Проблема синтеза дискретных управляющих систем является одной из основных проблем математической кибернетики. В общем виде она состоит в построении для заданной дискретной функции ее оптимальной (в том или ином смысле) структурной реализации в рассматриваемом классе управляющих систем. Теоретические результаты, полученные при решении указанной проблемы, находят применение в различных прикладных областях, к числу которых относятся задачи проектирования современных интегральных схем. Традиционная задача синтеза в рассматриваемой в работе постановке относится к изучению функции Шеннона для задержки, т.е. задержки самой «плохой» функции алгебры логики, зависящей от заданных n переменных. К рассматриваемой задаче относится ряд классических результатов теории дискретных управляющих систем, связанных, в частности, с нахождением схем асимптотически оптимальных одновременно по нескольким параметрам. Целью данной работы является перенесение известных результатов в области синтеза схем, связанных с одновременной оптимизацией схем по сложности и задержке на уровне асимптотических оценок, на новые модели задержки, отражающие емкостную специфику взаимосвязей элементов в интегральных схемах, а также различия временных характеристик элементов на различных наборах входных сигналов. Так, в работе изучается модель задержки в произвольном конечном полном базисе, в которой задержка базисного элемента – положительная действительная величина – по любому из его входов зависит от сигналов, подаваемых на остальные входы этого функционального элемента, и складывается из двух компонентов: задержки межэлементного соединения входа с выходом предыдущего элемента и, собственно, внутренней задержки рассматриваемого элемента. При этом задержки элемента по разным входам, вообще говоря, считаются независимыми величинами.

Материалы и методы. Используемые инструменты включают в себя технику универсальных множеств функций и технику моделирования булевых функций переменными на компонентах специальных разбиений булева куба. Метод синтеза схем формульного типа асимптотически оптимальных одновременно как по задержке, так и по сложности применяется к синтезу схем в рассматриваемой модели задержки.

Результаты. Получена линейная относительно величины n асимптотика функции Шеннона для задержки функций алгебры логики от заданных n переменных. Оказалось, что привлечение дополнительной зависимости задержки от функциональной составляющей элементов базиса не приводит к изменению поведения функции Шеннона на уровне асимптотики. Построены схемы формульного типа, асимптотически оптимальные как по сложности, так и по задержке.

Выводы. Установленные результаты позволяют сделать вывод о возможности перенесения классических результатов, связанных с одновременной оптимизацией схем формульного типа по сложности и по задержке, на новую модель задержки.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-07474-а.

Ключевые слова: сложность, задержка, глубина, схемы из функциональных элементов, мультиплексорная функция.

B. R. Danilov

ON SIMULTANEOUS OPTIMIZATION OF FORMULAS BY COMPLEXITY AND DELAY IN A MODEL WITH INTERGATE AND GATE'S INPUTS DELAYS

Abstract.

Background. The problem of synthesis of discrete control systems is one of the main problems of mathematical cybernetics. In general, it consists in construction of the optimal (in a varying sense) structural implementation of the given discrete function in the given class of control systems. The theoretical results, obtained while solving the mentioned problem, find their applications in different applied areas, among which are the problems of integral circuits design. The traditional synthesis problem, according to its formulation in this particular work, concerns the study of the Shannon function for delay, i.e. the delay of the "worst" Boolean function that depends on the given set of n variables. The problem under investigation also includes a number of classic results in the theory of discrete control systems, concerning construction of circuits that are asymptotically optimal according to several parameters simultaneously. The goal of the work is to transfer the known results in the area of circuit synthesis, associated with simultaneous optimization of circuits by several parameters, over to circuit models that reflect capacitive peculiarity of gate interconnections with greater accuracy and also reflect timing parameters of gates under different input signals. The work considers a delay model over an arbitrary finite complete basis, where the gate delay (a positive real quantity) over any of its inputs depend on signals passed on its other inputs and is composed of two components: the gates interconnection delay of the input with the output of the previous gate, and the inner delay of the gate. Meanwhile, delays of a gate over its different inputs are, generally speaking, considered to be independent values.

Materials and methods. The instruments used in the research included a technique of universal sets of Boolean functions and a technique of Boolean functions modelling on components of Boolean cube special partitions. The synthesis method of formula type circuits that are asymptotically optimal both by complexity and by delay was implemented for circuit synthesis in the described delay model.

Results. The author obtained Shannon function asymptotics, linear in regard to n , for the delay of Boolean functions that depend on the given n variables. It turns out that incorporation of an additional delay component, such as its input signals dependence, doesn't lead to a change of Shannon function asymptotical behavior. Formula type circuits, asymptotically optimal both by complexity and by delay, were constructed.

Conclusions. The established results allow to educe the applicability of the earlier known results, concerning simultaneous formula type circuits optimization by several parameters to a wider class of delay models.

Key words: complexity, delay, depth, function element circuits, multiplexor function.

Введение

Рассматривается задача реализации функций алгебры логики (ФАЛ) асимптотически оптимальными одновременно по двум параметрам формула-

ми над произвольным конечным полным базисом. В качестве оптимизируемых функционалов сложности формул изучаются обобщенная сложность (в ее традиционном понимании) и один из вариантов обобщения глубины (так называемая задержка на наборах [1], которая базируется на понятии задержки [2]). Таким образом, для функционала задержки рассматриваемого типа устанавливается возможность получения результатов, аналогичных классическим результатам О. Б. Лупанова [3], которые относятся к одновременной оптимизации функционалов обобщенной сложности и глубины схем из функциональных элементов (далее СФЭ или просто схем) в их традиционном понимании. С использованием методов С. А. Ложкина [4, 5] аналогичные результаты получаются и для формул. Мы также используем эту технику в наших построениях.

Пусть конечный полный базис B состоит из функциональных элементов (ФЭ) различных типов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b$. Элемент типа ε_i , $1 \leq i \leq b$, имеет k_i , $k_i \geq 1$, входов и реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geq 2$ существенно зависит от всех своих булевых переменных, заданных на множестве $B = \{0, 1\}$.

Сформулируем наши основные определения для схем, считая формулы (так называемые схемы формульного типа) их частным случаем. Определение СФЭ и формулы над базисом B традиционны¹. Будем также пользоваться понятием блок-схемы – СФЭ, входы которой помечены произвольными ФАЛ, естественным образом учитывающиеся при определении вектор-функции, реализуемой данной блок-схемой. Переменные, от которых зависят ФАЛ-пометки входов блок-схемы, считаются ее входными переменными. Схемы из функциональных элементов будем считать частным случаем блок-схем. При определении блок-подсхемы будем следить за тем, чтобы пометки ее входов были согласованы с ФАЛ, реализуемыми на соответствующих вершинах объемлющей схемы (блок-схемы).

Ниже нам понадобится понятие схем специального вида: назовем схему *инициальной цепью* (далее просто цепь), если она представляет собой последовательность функциональных элементов $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_\delta}$, в которой:

- 1) у каждого элемента выделен ровно один вход;
- 2) выход каждого элемента, кроме последнего, поступает на выделенный вход следующего элемента и только на него.

Выделенным входом цепи будем называть ее входную дугу, соответствующую выделенному входу ее *первого* элемента ε_{i_1} , а число δ назовем *структурной глубиной* цепи.

Будем считать, что для каждого функционального элемента ε_i задана положительная действительная величина L_i , которую будем называть *весом* этого элемента. Сумма весов всех функциональных элементов схемы Σ образует величину $L(\Sigma)$, которую назовем *сложностью* схемы Σ по аналогии с ее *структурной сложностью* $\ell(\Sigma)$, равной количеству элементов схемы Σ .

¹ Понятия, которые в данной работе не определяются, см., например, в [6, 7].

Как отмечалось выше, задержка на наборах типа [1] базируется на понятии задержки из работы [2]. Для разграничения этих понятий задержку [2] далее будем называть глубиной¹. Будем считать, что для каждой тройки целых чисел i, j, s ($1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq s \leq b$) и каждого булевого набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i})$ задана действительная положительная величина $T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})}$ – задержка переключения ФЭ ε_i по входу с номером j на наборе $\tilde{\alpha}$ значений его входных переменных, когда к указанному входу подключен ФЭ ε_s . Рассматриваемую величину будем считать равной нулю, когда ФАЛ $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{k_i})$ совпадает с константой (переключения не происходит), а в противном случае полагать ее независимой от значения сигнала α_j , пропускаемого по входу с номером j : $T_{ijs}^{(\tilde{\alpha}')} = T_{ijs}^{(\tilde{\alpha}'')}$, когда наборы $\tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}'' \in B^{k_i}$ отличаются только в j -й компоненте. Величину D_{ijs} , равную наименьшей из задержек $T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})}$, взятых по всевозможным двоичным наборам $\tilde{\alpha}$ рассматриваемого вида, назовем *глубиной* ФЭ типа ε_i по входу с номером j с подключенным по этому входу ФЭ типа ε_s .

Набор глубин элементов можно рассматривать сам по себе в качестве самостоятельной модели [2], однако теперь, когда глубины элементов подчинены указанному выше условию, будем говорить, что функционалы глубины и задержки базиса *согласованы*. Нам удобно рассматривать согласованную с задержкой глубину, потому что именно она определяет главную константу в асимптотическом поведении функций, рассматриваемых ниже. В терминологии работы [1] задержка определяет «основную» модель, а согласованная с ней глубина – модель «дополнительную».

Для придания смысла задержкам и глубинам элементов по входам, являющимся входами схемы, аналогично [2] будем соотносить с входами рассматриваемых нами СФЭ выходы каких-либо ФЭ базиса B и определять недостающие задержки и глубины аналогично тому, как они определялись для двух последовательно соединенных ФЭ. Указанные дополнительные пометки входов СФЭ типами ФЭ базиса учитываются при изоморфизме (равенстве) рассматриваемых СФЭ.

Глубина (обобщенная) $D(\omega)$ цепи ω – это сумма глубин ее ФЭ по выделенным входам. Пусть цепь ω является блок-схемой. Назовем цепь ω *существенной* на наборе $\tilde{\alpha}$ ее входных переменных, если при замене пометки выделенной дуги цепи ω на новую для этой цепи переменную полученная цепь существенно зависит от этой новой переменной. *Задержкой на наборе $\tilde{\alpha}$* существенной на этом наборе цепи ω назовем величину, равную сумме задержек, составляющих цепь ω ФЭ по выделенным входам в предположении, что на входы этих элементов поступают значения, реализуемые ω на наборе $\tilde{\alpha}$. Если цепь не является существенной на $\tilde{\alpha}$, то

¹ В качестве базового понятия глубины для задержки на наборах можно было бы взять модель глубины [8], в которой глубина межэлементного соединения определяется над схемой ограниченного размера. Принципиальных изменений это бы не повлекло.

ее задержку на наборе $\tilde{\omega}$ будем считать равной нулю. Просто *задержкой* $T(\omega)$ цепи ω назовем наибольшую из задержек этой цепи, взятых по всевозможным наборам ее входных переменных. Аналогично, инициальная цепь просто *существенна*, если она существенна на каком-либо наборе указанного вида. Подсхему без ФЭ, состоящую из единственной вершины, являющейся одновременно ее входом и выходом, следует считать тривиальной цепью нулевой задержки и глубины.

Понятия задержки и глубины распространяются на схемы общего вида с помощью так называемых главных цепей. Инициальную цепь СФЭ Σ , выделенный вход которой является входом Σ , а выход – выходом Σ , назовем *главной* цепью схемы Σ . Глубина $D(\Sigma)$ и задержка $T(\Sigma)$ СФЭ Σ равна наибольшей глубине и соответственно задержке главных цепей схемы Σ , в случае задержки рассматриваемых как ее блок-подсхемы. Аналогично, структурной глубиной $\delta(\Sigma)$ СФЭ Σ назовем наибольшую структурную глубину ее главных цепей.

Следует заметить, что произвольная СФЭ с одним выходом может быть преобразована к эквивалентной формуле путем применения операций¹ удаления висячей вершины и поднятия ветвления выхода ФЭ ко входам схемы, а также что указанное преобразование происходит без изменения глубины и задержки исходной схемы.

Определенная нами задержка СФЭ является попыткой на модельном уровне описать зависимость скорости зарядки или разрядки емкости связанного с выходом ФЭ проводника от набора значений, поступающих на входы элемента в момент переключения. Негативным свойством определенной таким образом задержки СФЭ является то, что без дополнительных ограничений любая ФАЛ реализуема «вырожденной» схемой с нулевой задержкой. Причиной такого положения вещей в «вырожденных» схемах являются множества цепей, несущественных каждая по отдельности, но реализующих в совокупности существенные ФАЛ. Детальное изучение этого эффекта в данной работе не проводится, однако в классе формул оказывается достаточным ограничиться лишь схемами, которые не содержат несущественных цепей. В самом деле, схемы формульного типа с несущественными цепями могут рассматриваться с содержательной точки зрения как избыточные: выделенные входы несущественных цепей можно заземлить (подать на них константу ноль) или закоротить (подать константу единица), не изменив при этом реализуемую схемой ФАЛ. С модельной точки зрения это означает, что наряду с ФЭ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b$ нам доступны все (существенные) ФЭ, которые получаются из них путем всевозможных подстановок² констант на входы этих элементов и которые вместе с элементами исходного базиса образуют *расширенный* базис $\tilde{B}$. При этом, если элемент ε_i порождает описанным способом элемент ε'_i , то сложностные характеристики последнего индуцируются элементом ε_i : его сложность L'_i совпадает с L_i , а задержка по входам на наборе входных переменных ε'_i совпадает

¹ Подробнее про удаление висячих вершин и поднятие ветвлений см. [6, с. 93, 148–149].

² Так называемое «забивание» входов константами.

с задержкой по соответствующим входам элемента ε_i на наборе, дополненном по «забываемым» входам соответствующими константами. Таким образом, постановка задачи синтеза оптимальных по задержке схем приобретает смысл среди класса формул U_B^Φ над базисом $\tilde{B}$, не содержащих несущественных цепей, а также класса схем U_B^C , получаемых из таких формул путем отождествления изоморфных подсхем. Именно в такой форме необходимо трактовать постановку задачи о задержке из работы [1], а также полученные в этой работе результаты. Заметим, что все построенные в [1] схемы, на которых достигаются верхние оценки, принадлежат классам U_B^C , U_B^Φ , а вносимая поправка необходима лишь для исключения «вырожденности» функционалов глубины и задержки.

Глубина $D_B(f)$ ФАЛ f , ее задержка $T_B(f)$ и сложность $L_B^\Phi(f)$ при реализации в классе U_B^Φ , а также функции Шеннона $D_B(n)$, $T_B(n)$, $L_B^\Phi(n)$ для соответственно глубины, задержки, сложности ФАЛ, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, при их реализации в классе U_B^Φ определяются обыкновенно:

$$D_B(f) = \min_{\Sigma} D(\Sigma), \quad T_B(f) = \min_{\Sigma} T(\Sigma), \quad L_B^\Phi(f) = \min_{\Sigma} L(\Sigma),$$

$$D_B(n) = \max_{f \in P_2(n)} D_B(f), \quad T_B(n) = \max_{f \in P_2(n)} T_B(f), \quad L_B^\Phi(n) = \max_{f \in P_2(n)} L_B^\Phi(f),$$

где минимумы берутся по множеству тех СФЭ Σ из U_B^C , которые реализуют ФАЛ f , а через $P_2(n)$ обозначено множество всех ФАЛ, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$.

В работе [2] была установлена следующая асимптотическая оценка¹: $D_B(n) \sim \tau_B n$, где константа τ_B – приведенная глубина базиса B – задается набором глубин его элементов. В настоящей работе показано, что также $T_B(n) \sim \tau_B$ с той же самой константой τ_B при условии, что глубина и задержка базиса B согласованы. В случае задержки константа τ_B называется приведенной задержкой базиса B . Таким образом, приведенная глубина и задержка базиса с согласованными параметрами глубины и задержки совпадают. Более того, устанавливается, что формула, на которой достигаются асимптотически оптимальная задержка и глубина, может быть выбрана также асимптотически оптимальной по сложности, а именно верна следующая основная теорема.

Теорема 1. Пусть B – конечный полный базис произвольного вида с согласованными параметрами глубины и задержки. Тогда для любого

¹ Асимптотическое равенство $h(n) \sim g(n)$ понимается нами как равенство вида $h(n) = g(n) \pm o(g(n))$, которое означает, что $|h(n) - g(n)| = o(g(n))$. Функции g и h положительны при достаточно больших значениях аргумента. Аналогичным образом надо понимать соотношение $h(n) = g(n) \pm O(g(n))$ и другие подобные им.

натурального n и любой ФАЛ $f \in P_2(n)$ существует формула $\mathcal{F}_n \in U_B^\Phi$, для которой выполняются асимптотические соотношения вида

$$D(\mathcal{F}_n) \sim \tau_B n, \quad T(\mathcal{F}_n) \sim \tau_B n, \quad L(\mathcal{F}_n) \sim \rho_B (n / \log_2 n), \quad (1)$$

в которых τ_B, ρ_B – положительные константы, задаваемые наборами глубин и весов элементов базиса B соответственно.

Константа ρ_B называется приведенным весом базиса B и согласно [3] определяется из соотношений

$$\rho_B = \min_{\substack{1 \leq j \leq b \\ k_j \neq 1}} \rho_j, \quad \rho_j = L_j / (k_j - 1). \quad (2)$$

1. Приведенная глубина базиса.

Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Далее мы рассматриваем исключительно формулы. Назовем формулу $\mathcal{F}$ *абсолютной (бесповторной)*, если каждая ее переменная (соответственно каждая ее существенная переменная) входит в $\mathcal{F}$ ровно один раз. Определим *ранг* $R(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ как число символов переменных в ее записи. С базисом B связана так называемая ранговая функция $R_B(t)$ действительного аргумента t , $t \geq 0$, значение которой равно наибольшему рангу формул, имеющих задержку, не превосходящую t . Определим связанные с базисом B основные константы:

$$k_{\min} = \min_{1 \leq i \leq b, k_i \neq 1} k_i, \quad k_{\max} = \max_{1 \leq i \leq b} k_i,$$

$$D_{\min} = \min_{\substack{1 \leq i \leq b, 1 \leq s \leq b \\ 1 \leq j \leq k_i}} D_{ijs}, \quad T_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq b, 1 \leq s \leq b, \\ 1 \leq j \leq k_i, \tilde{\alpha} \in B^{k_i}}} T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})}.$$

Приведенная глубина τ_B базиса B согласно [2] определяется соотношением

$$\tau_B = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\log_2 R_B(t)}. \quad (3)$$

Заметим, что расширение базиса B до базиса $\tilde{B}$ не приводит к изменению главных констант, определяющих асимптотические соотношения (1): $\tau_{\tilde{B}} = \tau_B$, $\rho_{\tilde{B}} = \rho_B$. Для константы ρ_B это очевидно из определения (2), а для константы τ_B вытекает из того, что $R_{\tilde{B}}(t + T_{\max}) \leq R_B(t)$, так как, «восстановив» ФЭ исходного базиса B , любую формулу над $\tilde{B}$ можно заменить формулой над B , при этом не уменьшив ранг формулы и не увеличив ее задержку более чем на $T_{\max}$. Следовательно, $\tau_B \leq \tau_{\tilde{B}}$. С другой стороны, непосредственно из определения (3) следует, что при расширении базиса константа τ_B не увеличивается.

Рассматриваемая далее лемма 2 является более сильным аналогом леммы 3 из работы [2] и позволяет установить существование формул наперед

заданного ранга с «хорошей» глубиной. Ее доказательство аналогично доказательству указанной выше леммы.

Лемма 1. Для любого натурального числа m в (конечном, полном) базисе B найдется формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$, для которой выполняются соотношения

$$m \leq R(\mathcal{F}) \leq m^{1+o(1)},$$

$$D(\mathcal{F}) = \tau_B \log_2 m \pm o(\log m).$$

Нижние оценки функции Шеннона получаются обыкновенным образом на основе мощностных соображений. Доказательство следующих двух лемм также традиционно.

Лемма 2. Для любых неотрицательного действительного t и натурального n число попарно неэквивалентных формул из U_B^Φ , которые зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$ и глубина (задержка, сложность) которых не больше t , не превосходит¹ $(c_1 n)^{R_A(t)}$ (соответственно $(c_2 n)^{R_B(t+c_3)}$, $\frac{1}{c_5 n} t + 1$ $(c_5 n)^{R_B}$).

Лемма 3. Для любого (конечного, полного) базиса B выполняются следующие асимптотические соотношения:

$$D_B(n) \geq \tau_B n(1 - o(1)), \quad T_B(n) \geq \tau_B n(1 - o(1)), \quad L_B^\Phi(n) \geq \rho_B(2^n / \log_2 n)(1 - o(1)).$$

2. Реализация мультиплексорных ФАЛ на основе обобщенного разложения

При доказательстве верхних асимптотических оценок будем опираться на методы, разработанные в [9]. Приведем определения основных понятий и сформулируем без доказательства утверждения лемм 4, 5, доказательства которых повторяют доказательство аналогичных утверждений [9].

Будем называть *стандартным* базис B_0 , который состоит из трех функциональных элементов $\varepsilon_\&, \varepsilon_\vee, \varepsilon_\neg$, реализующих соответственно ФАЛ $x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1$. Число, двоичной записью которого является набор α , $\alpha \in B^n$, будем записывать через $v(\alpha)$. Назовем *альтернированием* $\text{alt}(f)$ ФАЛ f минимальное число отрезков постоянства, уменьшенное на единицу, на которые распадается набор, составленный из значений ФАЛ f , взятых на наборах значений ее аргументов, расположенных в порядке следования задаваемых ими с помощью v -нумерации чисел.

Пусть $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ – разбиение булевого куба B^n от булевых переменных группы $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ на попарно непересекающиеся непустые подмножества $\delta_1, \dots, \delta_d$ (компоненты разбиения), объединение которых

¹ Буквой c с целочисленными индексами обозначаются абсолютные константы, однозначно задаваемые базисом B .

равно B^n . Определим мультиплексорную ФАЛ μ_Δ , соответствующую разбиению Δ , равенством

$$\mu_\Delta(\tilde{x}, u_1, \dots, u_d) = \bigvee_{j=1}^d \chi_j(\tilde{x}) u_j,$$

в котором χ_j – характеристическая ФАЛ компоненты δ_j . Заметим, что стандартную мультиплексорную ФАЛ μ_n порядка n ,

$$\mu_n(\tilde{x}, u_1, \dots, u_{2^n}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot u_{v(\sigma)+1},$$

можно рассматривать как мультиплексорную ФАЛ μ_Δ , связанную с тривиальным разбиением Δ , т.е. таким разбиением, что $\delta_{v(\sigma)+1} = \{\sigma\}$ для каждого $\sigma \in B^n$.

Лемма 4 (см. [9], лемма 2). Для целого $n \geq 2$ и отличной от константы ФАЛ g , $g \in P_2(n)$, найдется реализующая g формула $\mathcal{F}$ над стандартным базисом B_0 , для которой справедливы неравенства:

$$\delta(\mathcal{F}) \leq 2 \lceil \log_2 n \rceil + \lfloor \log_2(\text{alt}(g)) \rfloor + 1, \quad (4)$$

$$\ell(\mathcal{F}) \leq \frac{3}{2} \cdot n \lceil \log_2 n \rceil \text{alt}(g). \quad (5)$$

Лемма 5 (см. [9], следствия из лемм 6, 7). Пусть Δ – разбиение куба B^n переменных $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ на d , $d \leq p$, компонент, а ФАЛ $\Phi(y_1, \dots, y_p)$ реализуется абсолютной формулой $\mathcal{F}$ над базисом B . Тогда в базисе B найдется неповторная формула $\Phi(\tilde{u}, \tilde{w})$, $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_d)$, $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_{p+d})$, такая, что для некоторых ФАЛ $g'_1(\tilde{x}), \dots, g'_{p+d}(\tilde{x})$ блок-формула $\Phi' = \Phi(\tilde{u}, g'_1(\tilde{x}), \dots, g'_{p+d}(\tilde{x}))$ реализует ФАЛ $\mu_\Delta(\tilde{x}, \tilde{u})$ и выполняются соотношения¹:

$$\ell(\Phi) \leq \ell(\mathcal{F}) + c_4 d, \quad (6)$$

$$D(\mathcal{F}) \leq D(\Phi) \leq D(\mathcal{F}) + c_7, \quad (7)$$

$$D(\mathcal{F}) \leq T_{\tilde{u}}(\Phi') \leq D(\mathcal{F}) + c_8, \quad (8)$$

$$D(\mathcal{F}) \leq T_{\tilde{x}}(\Phi') \leq c_9 D(\mathcal{F}) + c_8. \quad (9)$$

Если, кроме того, Δ – разбиение куба B^n на последовательные отрезки, а в записи формулы $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y_1, \dots, y_p)$ переменная y_l появляется

¹ Через $T_{\tilde{x}}(\Phi')$ обозначена задержка блок-формулы Φ' по тем ее главным цепям, которые начинаются на входах, помеченных ФАЛ зависящими существенно или несущественно от какой-либо переменной группы $\tilde{x}$.

левее переменной y_r , тогда и только тогда, когда $l < r$, то альтернирование каждой из ФАЛ $g'_1(\tilde{x}), \dots, g'_{p+d}(\tilde{x})$ не превосходит $k_{\max} \cdot \delta(\mathcal{F})$.

Лемма 6. Для натуральных чисел n, p , связанных неравенством $p \leq n$, и некоторого числа $d = d(n, p)$ найдется неповторная формула $\Phi(\tilde{u}, \tilde{w})$ над базисом B , существенно зависящая от переменных групп $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_{2n})$, $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_d)$, и найдутся ФАЛ $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ такие, что блок-формула $\Phi(\tilde{u}, g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x}))$ реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_n(\tilde{x}, \tilde{u})$. При этом сложность формулы Φ , ее глубина, задержка блок-формулы Φ' , натуральное число d удовлетворяют для некоторых бесконечно малых функций α, γ соотношениям:

$$\ell(\Phi) \leq c_6 2^{n+\alpha(n/p)} \lceil n/p \rceil, \quad (10)$$

$$\tau_B n(1 - \gamma(n/p)) \leq D(\Phi) \leq \tau_B n(1 + \gamma(n/p)) + c_7 p, \quad (11)$$

$$\tau_B n(1 - \gamma(n/p)) \leq T_{\tilde{u}}(\Phi') \leq \tau_B n(1 + \gamma(n/p)) + c_8 p, \quad (12)$$

$$\tau_B n(1 - \gamma(n/p)) \leq T_{\tilde{x}}(\Phi') \leq \tau_B n(1 + \gamma(n/p)) + c_8 p + (c_9 - 1) \lfloor n/p \rfloor, \quad (13)$$

$$2p \cdot 2^{\lfloor n/p \rfloor} \leq d \leq 2p \cdot 2^{\lceil n/p \rceil (1+\alpha(n/p))}. \quad (14)$$

Кроме того, для альтернирования ФАЛ $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$ справедливы оценки

$$\text{alt}(g_i) \leq c_{10} \cdot (n/q) \quad (1 \leq i \leq d). \quad (15)$$

Доказательство. Используя лемму 1, найдем в базисе B формулы $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, для которых при некоторых бесконечно малых α_0, γ_0 выполняются соотношения:

$$2^{\lfloor n/p \rfloor} \leq R(\mathcal{F}') \leq 2^{\lfloor n/p \rfloor (1+\alpha_0(\lfloor n/p \rfloor))}, \quad (16)$$

$$2^{\lceil n/p \rceil} \leq R(\mathcal{F}'') \leq 2^{\lceil n/p \rceil (1+\alpha_0(\lceil n/p \rceil))}, \quad (17)$$

$$D(\mathcal{F}') = \tau_B \lfloor n/p \rfloor (1 \pm \gamma_0(\lfloor n/p \rfloor)), \quad (18)$$

$$D(\mathcal{F}'') = \tau_B \lceil n/p \rceil (1 \pm \gamma_0(\lceil n/p \rceil)). \quad (19)$$

Без ограничения общности будем считать формулы $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ абсолютными, так как переименование переменных не изменяет глубину формулы.

Представим число n в виде $n = p \cdot \lfloor n/p \rfloor + q$, где $0 \leq q < p$. Определим числа $n_1, \dots, n_p$ равенствами¹:

¹ Если $q = 0$, то все числа $n_1, \dots, n_p$ надо считать равными (n/p) .

$$n_1 = \dots = n_{p-r} = \lfloor n / p \rfloor, \quad n_{p-r+1} = \dots = n_p = \lceil n / p \rceil.$$

Пусть формулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ заданы равенствами¹:

$$\mathcal{F}_1 = \dots = \mathcal{F}_{p-q} = \mathcal{F}', \quad \mathcal{F}_{p-q+1} = \dots = \mathcal{F}_p = \mathcal{F}''.$$

Определим для каждого целого r , $1 \leq r \leq p$, вспомогательные величины $\lambda(r)$, d_r равенствами:

$$\lambda(r) = n - \sum_{i=1}^r n_i, \quad (20)$$

$$d_r = \sum_{i=1}^r \left(R(\mathcal{F}_i) + 2^{n_i} \right) \quad (21)$$

и положим $\lambda(0) = n$, $d_0 = 0$.

Введем обозначения для групп переменных:

$$\tilde{x}_r = (x_{\lambda(r)+1}, \dots, x_n), \quad \hat{x}_r = (x_{\lambda(r)+1}, \dots, x_{\lambda(r-1)}), \quad (22)$$

$$\tilde{u}_{r,s} = \left(u_{(s-1)2^{n-\lambda(r)}+1}, \dots, u_{s2^{n-\lambda(r)}} \right), \quad s = 1, \dots, 2^{\lambda(r)}, \quad (23)$$

$$\tilde{w}_r = (w_1, \dots, w_{d_r}), \quad \hat{w}_r = (w_{d_{r-1}+1}, \dots, w_{d_r}). \quad (24)$$

Опишем последовательный процесс построения формулы Φ , состоящий из p шагов. На первом шаге для каждого j_1 , $1 \leq j_1 \leq 2^{\lambda(1)}$, применяя лемму 5 к формуле $\mathcal{F}_1$ и тривиальному разбиению куба $B^{n-\lambda(1)}$ от переменных $\tilde{x}_1$, положив в лемме 5 величину d равной $2^{n-\lambda(1)}$, а величину p – равной $R(\mathcal{F})$, получим неповторную формулу $\mathcal{F}_{1,j_1}(\tilde{u}_{1,j_1}, \tilde{w}_1)$ и ФАЛ $g_i(\hat{x}_1)$, $1 \leq i \leq d_1$, которые согласно заключительной части утверждения леммы 5, в силу того что $\delta(\mathcal{F}) \leq D(\mathcal{F}) / D_{\min}$, удовлетворяют соотношению (15). Согласно (6)–(9) при $l=1$ справедливы следующие утверждения:

$$\mathcal{F}_{l,j_l}(\tilde{u}_{l,j_l}, g_1(\tilde{x}_l), \dots, g_{d_l}(\tilde{x}_l)) \text{ реализует } \mu_{n-\lambda(l)}(\tilde{x}_l, \tilde{u}_{l,j_l}), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) \leq D(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) + c_7 l, \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) \leq T_{\tilde{u}}(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) + c_8 l, \quad (27)$$

¹ В случае $q=0$ все формулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ совпадают с формулой $\mathcal{F}'$.

$$\sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) \leq T_{\hat{x}_l}(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) + (c_9 - 1)D(\mathcal{F}_l) + c_8 l, \quad (28)$$

$$\ell(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l 2^{n-\lambda(i)} \ell(\mathcal{F}_i) + c_4 \sum_{i=1}^l 2^{n-\lambda(i-1)}. \quad (29)$$

Рассмотрим шаг с номером r , $2 \leq r \leq p$. Применим лемму 5 к формуле $\mathcal{F}_r$ и тривиальному разбиению куба $B^{\lceil n/p \rceil}$ от переменных $\hat{x}_r$, положив в лемме 5 величину d равной $2^{\lceil n/p \rceil}$, а величину p – равной $R(\mathcal{F})$, в результате чего получим неповторную формулу $\mathcal{G}_r(\tilde{y}, \hat{w}_r)$, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{2^{\lceil n/p \rceil}})$, и ФАЛ $g_i(\hat{x}_r)$, $d_{r-1} + 1 \leq i \leq d_r$, аналогично рассмотренному выше, удовлетворяющие соотношению (15), такие что блок-формула $\mathcal{G}_r(\tilde{y}, g_{d_{r-1}+1}(\hat{x}_r), \dots, g_{d_r}(\hat{x}_r))$ реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_{\lceil n/p \rceil}(\hat{x}_r, \tilde{y})$. Для каждого j_r , $1 \leq j_r \leq 2^{\lambda(r)}$, определим формулу $\mathcal{F}_{r,j_r}$ равенством

$$\mathcal{F}_{r,j_r}(\tilde{u}_{r,j_r}, \tilde{w}_r) = \mathcal{G}_r \left(\mathcal{F}_{r-1, (j_r-1)2^{\lceil n/p \rceil} + 1}, \dots, \mathcal{F}_{r-1, j_r 2^{\lceil n/p \rceil}}, \hat{w}_r \right).$$

Нетрудно убедиться в том, что если для неповторных формул $\mathcal{F}_{r-1, j_{r-1}}$, $1 \leq j_{r-1} \leq 2^{\lambda(r-1)}$, построенных на предыдущем шаге, выполнены утверждения (25)–(29), взятые для $l = r - 1$, то они выполнены и для формулы $\mathcal{F}_{r, j_r}$ при $l = r$, которая также будет неповторной.

На последнем шаге, когда $r = p$, получаем искомую неповторную формулу $\Phi = \mathcal{F}_{p,1}$, для которой неравенства (26)–(28) с учетом (18), (19) дают (11)–(13). ФАЛ $g_i(\tilde{x})$, $1 \leq i \leq d = d_p$, из условия леммы с точностью до несущественных переменных совпадают с одноименными ФАЛ, построенными по ходу доказательства, для которых справедливость соотношений (15) нами установлена. При помощи (21), используя соотношения (16), (17), для оценки величины $R(\mathcal{F})$, имея в виду (20), получим неравенства (14). Кроме того, для структурной сложности формулы $\mathcal{F}$ записывается оценка

$$\ell(\mathcal{F}) \leq \frac{R(\mathcal{F}) - 1}{k_{\min} - 1}, \quad (30)$$

которая вместе с соотношениями (16), (17), (29) при $c_6 = 2 \cdot (2 + c_4)$ дает нам неравенства (10). *Лемма доказана.*

Из леммы 6 при приближении параметра p сколь угодно близко к конечной доли числа n вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. В обозначениях леммы 6 для любой сколь угодно медленно растущей функции ζ , отделенной от нуля числом $\varepsilon > 0$, любого натураль-

ного n и некоторого числа $d = d(n)$ в базисе B можно построить такую неповторную формулу $\Phi(\tilde{u}, \tilde{w})$, что для некоторых ФАЛ $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$ блок-формула $\Phi' = \Phi(\tilde{u}, g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x}))$ реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_n(\tilde{x}, \tilde{u})$. При этом структурная сложность формулы Φ , ее глубина, задержка блок-формулы Φ' , число d удовлетворяют соотношениям:

$$\ell(\Phi) \leq (c_6 / \varepsilon) \cdot \zeta(n) 2^n, \quad (31)$$

$$D(\Phi) = \tau_B n \pm o(n), \quad (32)$$

$$T(\Phi') = \tau_B n \pm o(n), \quad (33)$$

$$d = o(n \cdot \zeta(n)). \quad (34)$$

Для альтернирования ФАЛ $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$ выполняются неравенства

$$\text{alt}(g_i) \leq c_{11} \log_2(\zeta(n) / \varepsilon) \quad (1 \leq i \leq d). \quad (35)$$

3. Верхние оценки функций Шеннона. Построение формул, асимптотически оптимальных по глубине, задержке и сложности

Для доказательства утверждений, связанных с реализацией произвольной ФАЛ, используется техника [4, 5] и в этой связи нам понадобится ряд дополнительных понятий, первое из которых – понятие универсального множества ФАЛ. Рассмотрим произвольную ФАЛ $\varphi(y_1, \dots, y_p)$, которая существенно зависит от всех своих переменных. Множество ФАЛ $G \subseteq P_2(m)$ будем называть φ -универсальным порядка m , если любая ФАЛ $g \in P_2(m)$ представима в виде суперпозиции «внешней» ФАЛ φ и «внутренних» ФАЛ $g_1, \dots, g_p \in G$ вида

$$g = \varphi(g_1, \dots, g_p). \quad (36)$$

Следуя [6], будем строить φ -универсальное множество на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $d \leq p$, булевого куба B^m . Для каждого i , $1 \leq i \leq p$, в силу существенной зависимости ФАЛ φ по переменной y_i найдется набор булевых констант $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p}$ такой, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, y_i, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}.$$

Для каждого указанного i рассмотрим множество $G^{(i)}$ всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые на множестве наборов δ_j , $1 \leq j \leq d$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$. Положим по определению $G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$. Нетрудно убедиться, что теперь равенство (36) имеет место для любой ФАЛ g , если в качестве ФАЛ g_j , $1 \leq j \leq d$, выбрать ФАЛ из $G^{(j)}$, которая на δ_j совпадает с ФАЛ $g \oplus \alpha_{j,j}$, а в случае $d < p$ положить ФАЛ g_i , $d < i \leq p$, равной той

единственной ФАЛ, которая составляет множество $G^{(i)}$. Следовательно, построенное таким образом по разбиению Δ множество G является ϕ -универсальным порядка m . Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любой существенной ФАЛ $\phi(y_1, \dots, y_p)$ и любого разбиения $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ куба B^m на p компонент существует ϕ -универсальное множество G ФАЛ из $P_2(m)$ мощности не превосходящей $2^{|\delta_1|} + \dots + 2^{|\delta_p|}$.

Замечание. Как мы видели, утверждение 1 применимо и в том случае, когда количество компонент d разбиения Δ меньше p . В этом случае необходимо формально считать недостающие компоненты пустыми: $\delta_{d+1} = \dots = \delta_p = \emptyset$. Соответствующие пустым компонентам множества $G^{(d+1)}, \dots, G^{(p)}$ содержат каждое по одной ФАЛ.

Второе понятие, которое необходимо нам для дальнейших построений – это понятие регулярного множества двоичных наборов. Пусть $m < q$, назовем множество наборов $\delta \subset B^q$ m -регулярным, если $|\delta| = 2^m$ и все префиксы длины m наборов из δ различны. Регулярное множество наборов δ интересно тем, что любая ФАЛ из $P_2(q)$ на нем совпадает с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными переменными $x_{m+1}, \dots, x_q$. При этом некоторые ФАЛ из $P_2(m)$ совпадают на δ с переменными $x_1, \dots, x_q$ или их отрицаниями, а именно: этим свойством обладают ФАЛ системы $\tilde{\psi} \in P_2^{q-m}(m)$ такой, что двоичный набор $\tilde{\gamma} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где $\tilde{\alpha} \in B^m$, $\tilde{\beta} \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}$.

В связи с указанными свойствами регулярных множеств дадим следующее определение о моделировании ФАЛ. Пусть G – множество, содержащее ровно λ ФАЛ из $P_2(m)$, а $\Delta = (\delta_0, \dots, \delta_{2^{q-m}-1})$ – разбиение куба

B^q на m -регулярные компоненты. Скажем, что разбиение Δ моделирует ФАЛ множества G с помощью переменных или их отрицаний, если для любого j , $0 \leq j \leq 2^{q-m}-1$, любая ФАЛ g из G совпадает на δ_j с некоторой переменной $x_1, \dots, x_q$, или ее отрицанием. При этом компонента δ_j считается хорошей компонентой разбиения Δ относительно множества G в том случае, когда любая ФАЛ g из G совпадает на δ_j с некоторой переменной $x_1, \dots, x_q$ в чистом виде (без отрицания). Если компонента не является хорошей, то мы называем ее плохой. Справедливо утверждение (см. по этому поводу также [4, § 2]).

Утверждение 2. Для любых натуральных чисел m , λ , q , связанных соотношением $m + \lambda \leq q$, и любого множества G ФАЛ из $P_2(m)$ мощности

λ найдется разбиение $\Delta = (\delta_0, \dots, \delta_{2^{q-m}-1})$ куба B^q на m -регулярные компоненты, моделирующее ФАЛ множества G с помощью переменных или их отрицаний и такое, что компонента $\delta_{\tilde{\beta}}$, $\tilde{\beta} \in B^{q-m}$, является хорошей относительно G , когда число нулей в наборе $\tilde{\beta}$ не меньше λ .

Утверждение 3. Если в условиях утверждения 2 $q \geq m + 3\lambda$, то для некоторой положительной константы c , меньшей единицы, число плохих компонент разбиения Δ не превосходит c^{q-m} .

Лемма 8. Для любой сколь угодно медленно растущей функции $\zeta = o(2^n)$ и любого натурального числа n в (конечном, полном) базисе B найдется формула $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n$, которая реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_n(\tilde{x}, \tilde{y})$, зависящую от переменных $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$, является бесповторной по переменным $\tilde{y}$, и для глубины, задержки, сложности которой выполняются соотношения:

$$D(\mathcal{M}) \leq \tau_B n + o(n), \quad (37)$$

$$T(\mathcal{M}) \leq \tau_B n + o(n), \quad (38)$$

$$L(\mathcal{M}) = O(\zeta(n)2^n). \quad (39)$$

Доказательство. Используем лемму 7 для построения приведенных в ее утверждении формулы Φ и ФАЛ $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$. Для установления соотношений (37), (38) необходимо для каждого j , $1 \leq j \leq d$, построить формулу $\mathcal{G}_j$, которая реализует ФАЛ g_j со структурной глубиной $\delta(\mathcal{G}_j) = o(n)$, так как глубина и задержка отличаются от структурной глубины не более чем в константу раз. После этого вследствие (32), (33) формула $\mathcal{M}_n = \Phi(\tilde{y}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_d)$ будет искомой.

Найдем для каждого указанного j по лемме 4 формулу $\mathcal{G}'_j$, реализующую g_j над стандартным базисом B_0 , для которой из (4), (5), (35) вытекает

$$\delta(\mathcal{G}'_j) = O(\log(n \cdot \log \zeta(n))), \quad \ell(\mathcal{G}'_j) = O(n(\log n)(\log \zeta(n))). \quad (40)$$

Формулу $\mathcal{G}_j$ над базисом B получим из формулы $\mathcal{G}'_j$ заменой всех функциональных элементов $\varepsilon_{\&}$, $\varepsilon_{\vee}$, $\varepsilon_{\neg}$ на моделирующие их в базисе B бесповторные по существенным переменным формулы $\mathcal{K}_{\&}$, $\mathcal{K}_{\vee}$, $\mathcal{K}_{\neg}$. Окончательно для глубины, задержки, сложности формулы $\mathcal{G}_j$ имеем

$$D(\mathcal{G}_j) = O(\delta(\mathcal{G}'_j)), \quad T(\mathcal{G}_j) = O(\delta(\mathcal{G}'_j)), \quad L(\mathcal{G}_j) = O(\ell(\mathcal{G}'_j)),$$

что вместе с (31), (34), (40) при условии $\zeta = o(2^n)$ завершает доказательство. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть n – натуральное число, тогда для любой ФАЛ $f \in P_2(n)$ найдется реализующая ее над (конечным, полным) базисом B формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$, для глубины, задержки, сложности которой выполняются соотношения:

$$D(\mathcal{F}) \leq \tau_B n + o(n), \quad (41)$$

$$T(\mathcal{F}) \leq \tau_B n + o(n), \quad (42)$$

$$L(\mathcal{F}) \leq \rho_B \frac{2^n}{\log_2 n} + o\left(\frac{2^n}{\log n}\right). \quad (43)$$

Доказательство. Пусть приведенный вес базиса B достигается (2) на функциональном элементе ε_r , т.е. $\rho_B = L_r / (k_r - 1)$. Построим из t , где t – натуральный параметр, элементов ε_r абсолютную формулу $\Phi(z_1, \dots, z_p)$ с p входами, которая реализует ФАЛ $\varphi(z_1, \dots, z_p)$ и имеет вид квазиполного дерева, состоящего из $\lceil \log_{k_r} p \rceil$ ярусов. По построению формулы Φ величина p определяется равенством

$$p = t(k_r - 1) + 1.$$

Рассмотрим в качестве параметров натуральные числа $m = m(n)$, $s = s(n)$, которые будем считать основными параметрами, и подчиним им величину $t = t(m, s)$ таким образом, чтобы $p = p(m, s)$ оказалось наименьшим числом, большим или равным $2^m/s$. Очевидно, между числами m , s , p выполняются отношения

$$\frac{2^m}{s} \leq p < \frac{2^m}{s} + (k_r - 1).$$

Рассмотрим разбиение $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ куба B^m на $d = \lceil 2^m/s \rceil$ последовательных отрезков такое, что $\pi_1 = \dots = \pi_d = s$, $\pi_d \leq s$. Используя утверждение 1, построим на основе разбиения Π φ -универсальное множество ФАЛ $G \subseteq P_2(m)$, мощность λ которого не превосходит $p \cdot 2^s$. Положим натуральное число $q = q(m, s)$ равным $(m + 3p \cdot 2^s)$, тогда будут выполняться неравенства

$$m + 3\lambda \leq q < n,$$

если предположить число n достаточно большим для того, чтобы выбор параметров m , s представлялся возможным. Построим с использованием утверждений 2, 3 разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от переменных группы $\vec{x}' = (x_1, \dots, x_q)$ на m -регулярные компоненты и рассмотрим

следующее разложение ФАЛ f по последним $(n-q)$ переменным группы $\tilde{x}' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in B^{n-q}} K_{\sigma}(\tilde{x}') \cdot f_{\sigma}(\tilde{x}'), \quad (44)$$

в котором через $K_{\sigma}(\tilde{x}')$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-q})$, обозначена элементарная конъюнкция вида $x_{q+1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_{n-q}}$. Разложим ФАЛ $f_{\sigma} \in P_2(q)$ по компонентам разбиения Δ :

$$f_{\sigma}(x') = \bigvee_{j=1}^{2^{q-m}} \chi_j(\tilde{x}') \cdot f_{\sigma,j}(\tilde{x}'), \quad (45)$$

где χ_j – характеристическая ФАЛ компоненты δ_j . В силу m -регулярности разбиения Δ для любых набора $\sigma \in B^{n-q}$ и номера $j \in [1, 2^{m-q}]$ ФАЛ $f_{\sigma,j}(\tilde{x}')$ совпадает на δ_j с некоторой ФАЛ $g_{\sigma,j}(\hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, \dots, x_m)$, т.е.

$$\chi_j(\tilde{x}') \cdot f_{\sigma,j}(\tilde{x}') = \chi_j(\tilde{x}') \cdot g_{\sigma,j}(\hat{x}), \quad (46)$$

а в силу φ -универсальности множества G для указанных σ , j , найдутся ФАЛ $g_{\sigma,j,1}, \dots, g_{\sigma,j,p} \in G$ такие, что верно представление

$$g_{\sigma,j}(\hat{x}) = \varphi(g_{\sigma,j,1}(\hat{x}), \dots, g_{\sigma,j,p}(\hat{x})). \quad (47)$$

Однако ФАЛ $g_{\sigma,j,1}, \dots, g_{\sigma,j,p}$ на компоненте δ_j разбиения Δ совпадают с некоторыми переменными $x_{m+1}, \dots, x_q$ или их отрицаниями, т.е. совпадают соответственно с ФАЛ $x_{v_{\sigma,j,1}}^{\alpha_{\sigma,j,1}}, \dots, x_{v_{\sigma,j,p}}^{\alpha_{\sigma,j,p}}$, где $\alpha_{\sigma,j,1}, \dots, \alpha_{\sigma,j,p}$ – некоторые булевские константы, а $v_{\sigma,j,1}, \dots, v_{\sigma,j,p}$ – натуральные числа отрезка $[m+1, q]$, поэтому из (47) следует

$$g_{\sigma,j}(\hat{x}) = \varphi\left(x_{v_{\sigma,j,1}}^{\alpha_{\sigma,j,1}}, \dots, x_{v_{\sigma,j,p}}^{\alpha_{\sigma,j,p}}\right). \quad (48)$$

Из соотношений (44)–(46), (48), меняя порядок суммирования в дизъюнкциях, получаем следующее представление ФАЛ f :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{2^{q-m}} \chi_j(\tilde{x}') \cdot \left(\bigvee_{\sigma \in B^{n-q}} K_{\sigma}(\tilde{x}') \cdot \varphi\left(x_{v_{\sigma,j,1}}^{\alpha_{\sigma,j,1}}, \dots, x_{v_{\sigma,j,p}}^{\alpha_{\sigma,j,p}}\right) \right). \quad (49)$$

Искомая формула $\mathcal{F}$ получается на основе представления (49) ФАЛ f следующим образом. Воспользуемся леммой 1 для построения над B формулы Ψ , для которой при некоторых бесконечно малых α , γ выполняются соотношения

$$2^{q-m} \leq R(\Psi) \leq 2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))}, \quad (50)$$

$$D(\Psi) \leq \tau_B(q-m)(1+\gamma(q-m)). \quad (51)$$

Используя лемму 5, подберем для формулы Ψ , реализуемой ею ФАЛ, разбиения Δ , формулу Φ_0 и ФАЛ $g_1(\tilde{x}'), \dots, g_{d_0}(\tilde{x}')$, $d_0 = R(\Psi) + 2^{q-m}$ такие что блок-формула Φ'_0 , заданная равенством $\Phi'_0 = \Phi_0(\tilde{u}', g_1(\tilde{x}'), \dots, g_{d_0}(\tilde{x}'))$, реализует связанную с разложением (45) мультиплексорную ФАЛ $\mu_\Delta(\tilde{u}', \tilde{x}')$. Из (6)–(9) с использованием неравенств (50), (51), а также неравенств (30), записанных для формулы Ψ , вытекают соотношения:

$$d_0 = O\left(2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))}\right),$$

$$\ell(\Phi_0) = O\left(2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))}\right),$$

$$D(\Phi_0) \leq D(\Psi) + c_7,$$

$$T_{\tilde{u}'}(\Phi'_0) \leq D(\Psi) + c_8,$$

$$T_{\tilde{x}'}(\Phi'_0) \leq c_9 D(\Psi) + c_8.$$

Пусть построенная над B формула $\mathcal{G}_i$, $1 \leq i \leq d_0$, реализует ФАЛ $g_i(\tilde{x}')$ моделированием ее совершенной дизъюнктивной нормальной формы при помощи полученных в формул $\mathcal{K}_\&$, $\mathcal{K}_\vee$, $\mathcal{K}_\neg$, реализующих соответственно ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$ бесповторно по своим существенным переменным, тогда

$$L(\mathcal{G}_i) = O(q \cdot 2^q), \quad D(\mathcal{G}_i) = O(q), \quad T(\mathcal{G}_i) = O(q) \quad (1 \leq i \leq d_0).$$

В соответствии с вышесказанным бесповторная по информационным переменным $\tilde{u}'$ формула $\mathcal{M}_0 = \Phi_0(\tilde{u}', \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{d_0})$ реализует ФАЛ $\mu_\Delta(\tilde{u}', \tilde{x}')$, для нее выполняются соотношения:

$$L(\mathcal{M}_0) = O\left(q \cdot 2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))+q}\right),$$

$$D_{\tilde{u}'}(\mathcal{M}_0) = \tau_B(q-m)(1 \pm \gamma'_1(q-m)),$$

$$T_{\tilde{u}'}(\mathcal{M}_0) = \tau_B(q-m)(1 \pm \gamma'_2(q-m)),$$

$$D_{\tilde{x}'}(\mathcal{M}_0) = O(q), \quad T_{\tilde{x}'}(\mathcal{M}_0) = O(q). \quad (52)$$

Мультиплексорная ФАЛ $\mu_{n-q}(\tilde{u}', \tilde{x}')$, связанная с разложением (44), реализуется с помощью леммы 8, бесповторной по информационным переменным формулой $\mathcal{M}_1$, для которой при выборе $\zeta(n) = o(\log n)$ выполняются соотношения:

$$L(\mathcal{M}_1) = o(\log(n-q) \cdot 2^{n-q}),$$

$$D(\mathcal{M}_1) = \tau_B(n-q)(1 \pm \gamma'_3(n-q)),$$

$$T(\mathcal{M}_1) = \tau_B(n-q)(1 \pm \gamma'_4(n-q)). \quad (53)$$

Из вышесказанного следует, что при выполнении условий

$$q-m = \omega(1), \quad n-q = \omega(1), \quad q = o(2^n / \log n)$$

для сложности, глубины, задержки формулы $\mathcal{F}$, построенной на основе разложения (49) с использованием формул $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, Φ , $\mathcal{K}_\perp$, для некоторой положительной константы $c < 1$ выполняются следующие соотношения:

$$D(\mathcal{F}) \leq \tau_B(n-m)(1 \pm o(1)) + O(\log p),$$

$$T(\mathcal{F}) \leq \tau_B(n-m)(1 \pm o(1)) + O(\log p),$$

$$L(\mathcal{F}) \leq L(\mathcal{M}_0) + 2^{q-m} L(\mathcal{M}_1) + 2^{n-m} L(\Phi)(1 + O(p \cdot c^{q-m})),$$

откуда при выборе параметров

$$m = \lfloor 2 \log_2 \log_2 n \rfloor, \quad s = \lfloor \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n \rfloor$$

из (52), (53) вытекают (41)–(43). Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 3, 9.

Список литературы

1. **Ложкин, С. А.** О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам и входным наборам / С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2013. – № 4. – С. 25–33.
2. **Данилов, Б. Р.** О поведении функции Шеннона для задержки схем в модели, где задержка соединений определяется типами соединяемых элементов / Б. Р. Данилов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 78–100.
3. **Лупанов, О. Б.** О схемах функциональных элементов с задержками / О. Б. Лупанов // Проблемы кибернетики. – Вып. 23. – М.: Наука, 1970. – С. 43–82.
4. **Ложкин, С. А.** Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов / С. А. Ложкин // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 6. – М.: Наука, 1996. – С. 189–214.
5. **Ложкин, С. А.** О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе / С. А. Ложкин // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. – 1996. – № 2 – С. 80–82.
6. **Ложкин, С. А.** Основы кибернетики / С. А. Ложкин. – М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. – 251 с.
7. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику: учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский; под ред. В. А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 384 с.
8. **Данилов, Б. Р.** О поведении функции Шеннона для обобщенной глубины схем в модели, где глубина межэлементного соединения определяется над схемой ограниченного размера / Б. Р. Данилов // Материалы X молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 6–8 октября 2015 г.). – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. – С. 18–23.
9. **Ложкин, С. А.** О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам /

С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов // Прикладная математика и информатика. – 2011. – № 39. – С. 107–129.

References

1. Lozhkin S. A., Danilov B. R. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2013, no. 4, pp. 25–33.
2. Danilov B. R. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 78–100.
3. Lupanov O. B. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. Issue 23. Moscow: Nauka, 1970, pp. 43–82.
4. Lozhkin S. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 6. Moscow: Nauka, 1996, pp. 189–214.
5. Lozhkin S. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika* [Bulletin Moscow University. Series: Mathematics. Mechanics]. 1996, no. 2, pp. 80–82.
6. Lozhkin S. A. *Osnovy kibernetiki* [Fundamentals of cybernetics]. Moscow: Izd. otel f-ta VMiK MGU, 2004, 251 p.
7. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku: ucheb. posobie dlya vuzov* [Introduction into discrete mathematics: tutorial for universities]. 4th ed. Moscow: Vysshaya shkola, 2003, 384 p.
8. Danilov B. R. *Materialy X molodezhnoy nauchnoy shkoly po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moskva, 6–8 oktyabrya 2015 g.)* [Proceedings of X youth scientific school on discrete mathematics and application thereof (Moscow, 6–8 October 2015)]. Moscow: IPM im. M. V. Keldysha, 2015, pp. 18–23.
9. Lozhkin S. A., Danilov B. R. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied mathematics and informatics]. 2011, no. 39, pp. 107–129.

Данилов Борис Радиславович

младший научный сотрудник,
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
(Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: brdanilov@gmail.com

Danilov Boris Radislavovich

Research assistant, Lomonosov Moscow
State University (1 Leninskie gory street,
Moscow, Russia)

УДК 519.714

Данилов, Б. Р.

Об одновременной оптимизации формул по сложности и задержке на наборах в модели с задержками соединений между элементами /
Б. Р. Данилов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 55–74.